1.6.2 Vzorce pro mocniny I

Předpoklady: 010601

Př. 1: Zapiš jednou mocninou: a) $2^2 \cdot 2^3$, b) $3^2 \cdot 3^1$, c) $2^3 \cdot 3^2$.
Doplň větu: Pro každé $a \in R$ a $r, s \in N$ platí: $a^r \cdot a^s =$.

a) $2^2 \cdot 2^3$ zatím nemáme pravidlo $\Rightarrow$ zkusíme si rozepsat mocniny na násobení
$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ násobíme pět dvojek, nezáleží, z které mocniny je máme
$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

b) $3^2 \cdot 3^1$ zkusíme stejný postup jako v předchozím bodu.
$3^2 \cdot 3^1 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$

c) $2^3 \cdot 3^2$ rozepíšeme a uvidíme.
$2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ jako jednu mocninu to zapsat nemůžeme, násobíme mezi sebou dvě různá čísla (maximálně bychom mohli postupovat takto: $2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 2 \cdot 6^2$.

Doplňování věty: $a^r \cdot a^s =$ jde o obecný zápis prvních dvou bodů tohoto příkladu, spojujeme součin dvou mocnin stejného čísla do jedné mocniny $\Rightarrow$ sečteme exponenty.
Pro každé $a \in R$ a $r, s \in N$ platí: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

Pro každé $a \in R$ a $r, s \in N$ platí: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

Důkaz: $a^r \cdot a^s = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{r-\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{s-\text{krát}}}_{(r+s)-\text{krát} \Rightarrow a^{r+s}} = a^{r+s}$.

Př. 2: Zjednoduš.
a) $2^3 \cdot 2^4$ b) $(-3) \cdot (-3)^5$ c) $2^{12} \cdot 2^{15} \cdot 2$ d) $(-2)^2 \cdot 3^3 \cdot 3^6 \cdot (-2)^3$

a) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ b) $(-3) \cdot (-3)^5 = (-3)^6 = 3^6$ (šestka je sudá, výsledek je kladný)
Jiný postup: $(-3) \cdot (-3)^5 = -3^1 \cdot (-3^5) = 3^{1+5} = 3^6$.
c) $2^{12} \cdot 2^{15} \cdot 2 = 2^{12+15+1} = 2^{28}$
d) $(-2)^2 \cdot 3^3 \cdot 3^6 \cdot (-2)^3 = (-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot 3^3 \cdot 3^6 = (-2)^5 \cdot 3^9 = -2^5 \cdot 3^9$

Pedagogická poznámka: Při počítání bodu d) je třeba ohlídat, aby studenti nedávali dohromady mocniny s různými základy (někteří se na to zeptají, někteří to rovnou zkazí). V první fázi nikdy neříkám, v čem je chyba, jenom ji ukážu a připomenu, aby si pořádně přečetli rámeček se vzorcem.

Př. 3: Zapiš jedinou mocninou.

a) $4\cdot 2^4\cdot(-2)$ b) $\left(-2^4\right)\cdot 2^3\cdot 2^2\cdot(-2)^3$ c) $a^2\cdot a^4\cdot(-a)^3$

d) $(b-c)^2\cdot(c-b)^4$

a) $4\cdot 2^4\cdot(-2)=2^2\cdot 2^4\cdot -2=-2^{2+4+1}=-2^7$

b) $\left(-2^4\right)\cdot 2^3\cdot 2^2\cdot(-2)^3=-2^4\cdot 2^3\cdot 2^2\cdot\left(-2^3\right)=2^4\cdot 2^3\cdot 2^2\cdot 2^3=2^{4+3+2+3}=2^{12}$

c) $a^2\cdot a^4\cdot(-a)^3=-a^2\cdot a^4\cdot a^3=-a^{2+4+3}=-a^9$

d) $(b-c)^2\cdot(c-b)^4=(b-c)^2\cdot\left[-(b-c)\right]^4=(b-c)^2\cdot(b-c)^4=(b-c)^6$

Př. 4: Zjednoduš.

a) $\left(a^3\right)^2+\left(-a^2\right)^3+2a^5-a^2a^3$

b) $3\left(-a^3\right)^2+2\left(-a^2\right)^3+2a^5-(-a)^2a^3+3a\cdot a^4+a^2(-a)^3\cdot 3a$

c) $b^6\cdot b+\left(-b^2\right)^3+2(-b)^3\cdot b^4+(-b)^7:b^2$

a) $\left(a^3\right)^2+\left(-a^2\right)^3+2a^5-a^2a^3=a^6-a^6+2a^5-a^5=a^5$

b)

$3\left(-a^3\right)^2+2\left(-a^2\right)^3+2a^5-(-a)^2a^3+3a\cdot a^4+a^2(-a)^3\cdot 3a=$

$=3a^6-2a^6+2a^5-a^2a^3+3a^5-3a^2a^3a=a^6+2a^5-a^5+3a^5-3a^6=-2a^6+4a^5$

c)

$b^6\cdot b+\left(-b^2\right)^3+2(-b)^3\cdot b^4+(-b)^7:b^2=b^7-b^6-2b^7-b^7:b^2=$

$=-b^7-b^6-\dfrac{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{b}}{\cancel{b}\cdot\cancel{b}}=-b^7-b^6-b^5$

Pedagogická poznámka: Snažím se zařídit, aby všichni zkusili vyřešit bod c) v předcházejícím příkladě. Je zajímavé studenty sledovat, jak si poradí s něčím, co ještě neprobírali. Určitě si někdo bude stěžovat, že vzorec pro dělení mocnin jsme ještě neměli, chci po nich, aby to přesto zkusili. Na příkladě toho, že to jde, se snažím ukázat, že ve chvílích, kdy si nejsme jisti půdou pod nohama, je zvlášť důležité vědět, co vlastně věci znamenají.

Vzoreček slíbím na příští hodinu, vždy se najde někdo, kdo ho stejně odhalí.

Pedagogická poznámka: Následující příklad odkazuje na sbírku příkladů, kterou studentům rozdávám. Slouží k tomu, aby ti rychlejší měli co dělat. S celou třídou se těmito příklady nezdržujeme, pomalejší si je musí povinně vypočítat doma.

Př. 5: Příklady 1, 2, 3 sbírka Mocniny s celým mocnitelem.

Př. 6: Najdi a dokaž pravidlo pro zjednodušení výrazu: $\frac{a^r}{a^s} =$, pokud platí $r > s$, $a \neq 0$.

Pro každé $a \in R$, $a \neq 0$ a $r, s \in N$, $r > s$ platí: $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

Důkaz: $\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a}^{r-\text{krát}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{s-\text{krát}}} = \overbrace{a \cdot a \ldots a}^{(r-s)-\text{krát}} = a^{r-s}$ (vykrátíme, co jde)

Př. 7: Odstraň zlomky ve výrazech (nepoužívej krácení, ale vzorec po dělení mocnin). Výsledek udej jako mocninu.

a) $\frac{2^{14}}{2^6}$ b) $\frac{(-4)^{35}}{(-4)^{13}}$ c) $\frac{a^3 \cdot b^5}{b^2 \cdot a}$ d) $\frac{x^4 \cdot (-x)^7}{(-x)^3 \cdot x^2}$ e) $\frac{a^4 \cdot (-a)^3 \cdot b^5}{(-a)^6 \cdot (-b)^3}$

a) $\frac{2^{14}}{2^6} = 2^{14-6} = 2^8$

b) $\frac{(-4)^{35}}{(-4)^{13}} = (-4)^{35-13} = (-4)^{22} = 4^{22}$ (sudá mocnina $\Rightarrow$ mínus zmizí)

Jinak: $\frac{(-4)^{35}}{(-4)^{13}} = \frac{-4^{35}}{-4^{13}} = 4^{35-13} = 4^{22}$ (podíl dvou záporných čísel je kladné číslo, případně mínusy se zkrátí)

c) $\frac{a^3 \cdot b^5}{b^2 \cdot a} = a^{3-1} \cdot b^{5-2} = a^2 \cdot b^3$

d) $\frac{x^4 \cdot (-x)^7}{(-x)^3 \cdot x^2} = \frac{-x^4 \cdot x^7}{-x^3 \cdot x^2} = \frac{x^{4+7}}{x^{3+2}} = \frac{x^{11}}{x^5} = x^{11-5} = x^6$

(exponenty můžeme vyřešit i najednou: $\frac{-x^4 \cdot x^7}{-x^3 \cdot x^2} = x^{4+7-3-2} = x^6$)

Jinak: $\frac{x^4 \cdot (-x)^7}{(-x)^3 \cdot x^2} = x^{4-2} \cdot (-x)^{7-3} = x^2 \cdot (-x)^4 = x^2 \cdot x^4 = x^{2+4} = x^6$

e) $\frac{a^4 \cdot (-a)^3 \cdot b^5}{(-a)^6 \cdot (-b)^3} = \frac{-a^4 \cdot a^3 \cdot b^5}{-a^6 \cdot b^3} = \frac{a^7 \cdot b^5}{a^6 \cdot b^3} = ab^2$

Př. 8: Zjednoduš. Výsledek zapiš pomocí mocnin prvočísel.

a) $\frac{12 \cdot 18}{2 \cdot 27}$ b) $\frac{12 \cdot 18 \cdot 8}{32 \cdot 9}$ c) $\frac{24 \cdot 25 \cdot 12}{15 \cdot 16}$

a) $\frac{12 \cdot 18}{2 \cdot 27} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2}{2 \cdot 3^3} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{2 \cdot 3^3} = 2^2$

b) $\dfrac{12\cdot 18\cdot 8}{32\cdot 9}=\dfrac{2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 3^2\cdot 2^3}{2^5\cdot 3^2}=\dfrac{2^6\cdot 3^3}{2^5\cdot 3^2}=2\cdot 3$

c) $\dfrac{24\cdot 25\cdot 12}{15\cdot 16}=\dfrac{2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 2^2\cdot 3}{5\cdot 3\cdot 2^4}=\dfrac{2^5\cdot 3^2\cdot 5^2}{5\cdot 3\cdot 2^4}=2\cdot 3\cdot 5$

Poznámka: Například bod b) je možné řešit i takto:
$\dfrac{12\cdot 18\cdot 8}{32\cdot 9}=\dfrac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}=\dfrac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}=2\cdot 3$. Takový postup je však nevhodný, protože je strašně nepřehledný (tím stoupá pravděpodobnost chyby) a jde v podstatě proti smyslu mocnin, protože nevyužívá zjednodušení zápisu, které umožňují.

Pedagogická poznámka: O předchozí poznámce je potřeba se v hodině zmínit, i kdyby tímto způsobem (o čemž ale silně pochybuji) nikdo nepočítal.

Př. 9: Spočti a urči podmínky, za kterých mají výrazy smysl.

a) $\dfrac{(a-1)^3(1-a)^2}{(a-1)^4}$ b) $\dfrac{-a^2\cdot b^4\cdot a^3}{b^2\cdot(-a)^2\cdot b}$ c) $\dfrac{(x+y)^4\cdot(y-x)^3}{(x-y)^2\cdot(x+y)^3}$

a) $\dfrac{(a-1)^3(1-a)^2}{(a-1)^4}=\dfrac{(a-1)^3\left[-(a-1)\right]^2}{(a-1)^4}=\dfrac{(a-1)^3(a-1)^2}{(a-1)^4}=\dfrac{(a-1)^5}{(a-1)^4}=(a-1)^{5-4}=a-1$

$a\neq 1$,

Podrobnější úprava výrazu: $(1-a)^2=\left[-(a-1)\right]^2=(-1)^2(a-1)^2=(a-1)^2$. To, že jsme uvnitř závorky obrátili obě znaménka a neprojevilo se to navenek, není zarážející, když si uvědomíme, že nezáleží na tom, zda mocníme $(2)^2$ nebo $(-2)^2$. Výsledek je v obou případech stejný i když jde o opačná čísla, stejně jako je tomu u výrazů $(1-a)^2=(a-1)^2$.

b) $\dfrac{-a^2\cdot b^4\cdot a^3}{b^2\cdot(-a)^2\cdot b}=-\dfrac{a^2\cdot b^4\cdot a^3}{b^2\cdot a^2\cdot b}=-\dfrac{a^5\cdot b^4}{b^3\cdot a^2}=-a^{5-2}\cdot b^{4-3}=-a^3b$

$a\neq 0; b\neq 0$

c) $\dfrac{(x+y)^4\cdot(y-x)^3}{(x-y)^2\cdot(x+y)^3}=\dfrac{(x+y)^4\cdot(y-x)^3}{\left[-(y-x)\right]^2\cdot(x+y)^3}=\dfrac{(x+y)^4\cdot(y-x)^3}{(y-x)^2\cdot(x+y)^3}=(x+y)^{4-3}\cdot(y-x)^{3-2}=$

$=(x+y)(y-x)=y^2-x^2$

$x\neq y; x\neq -y$

Pedagogická poznámka: Podmínky v tomto okamžiku příliš neřešíme, jejich čas přijde v hodině 010701.

Př. 10: Petáková:
strana 62/cvičení 37 a) d)
strana 62/cvičení 38 a)

Shrnutí: $a^3 = a \cdot a \cdot a$ a z toho vyplývají i vzorce.